Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2021

Lineare Algebra II
Blatt 3
Abgabe: 17.05.2021, 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**
Zeige, dass jede quadratische $n\times n$ Matrix A mit $A^3 = A$ über einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik verschieden von 2 diagonalisierbar ist.
Hinweis: Welches sind die (möglichen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms?

Aufgabe 2 (7 Punkte)**.**
Auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V = \mathbb{Q}[T]_{\leq 3}$ aller Polynome über $\mathbb{Q}$ vom Grad höchstens 3 betrachte die lineare Abbildung $F : V \to V$, welche bezüglich der Basis $\{1, T, T^2, T^3\}$ durch die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 6 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Zeige $F^2 = F$. Folgere, dass die Unterräume $\mathrm{Ker}(F)$ und $\mathrm{Im}(F)$ transversal liegen.

(b) Schließe aus (a), dass $V = \mathrm{Ker}(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$ und schreibe explizit die Zerlegung für v aus V als Element der direkten Summe $\mathrm{Ker}(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$.

(c) Folgere aus den vorigen Aufgabenteilen, dass F diagonalisierbar ist und gib eine Basis von Eigenvektoren an.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**
Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix über dem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Zeige, dass die Matrix $\mathbf{Id}_n - A$ regulär ist.

(b) Berechne explizit die Inversen von $\mathbf{Id}_n - A$ und $\mathbf{Id}_n + A$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**
Seien P und Q zwei Polynome aus dem Polynomring $\mathbb{K}[T]$ über einem Körper $\mathbb{K}$ derart, dass $P \cdot Q = T^n$.

(a) Beschreibe vollständig P und Q, wenn $n = 0$.

(b) Zeige, dass das Polynom T ein Teiler von P oder von Q ist, wenn $n > 0$. Muss T sowohl P als auch Q teilen?

(c) Schließe induktiv über n, dass jeder Teiler des Polynoms T^n von der Form $\lambda \cdot T^k$ sein muss.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.